

Warszawa, 12.07.2019

Dr hab. inż. Remigiusz Augusiak, prof. CFT  
Centrum Fizyki Teoretycznej PAN  
Al. Lotników 32/46  
02-668 Warszawa

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Jacka Gruca  
pt. „Dwupoziomowa optymalizacja związana z twierdzeniem Bella”**

Rozprawa pt. „Dwupoziomowa optymalizacja związana z twierdzeniem Bella” mgr. Jacka Gruca napisana została w ramach interdyscyplinarnego przewodu doktorskiego, przy czym dyscyplina wiodąca to informatyka (dziedzina nauk technicznych), a dyscyplina dodatkowa to fizyka. Rozprawa powstała pod kierunkiem prof. W. Laskowskiego z Uniwersytetu Gdańskiego i prof. Z. Puchały z Instytutu Informatyki Teoretycznej i Stosowanej PAN w Gliwicach. Jest to cykl następujących czterech publikacji:

[D1] J. Gruca, W. Laskowski, M. Żukowski, M. Kiesel, W. Wieczorek, C. Schmid, H. Weinfurter, *Nonclassicality thresholds for multiqubit states: Numerical analysis*, Phys. Rev. A **82**, 012118 (2010),

[D2] J. Gruca, W. Laskowski, M. Żukowski, *Nonclassicality of pure two-qutrit entangled states*, Phys. Rev. A **85**, 022118 (2012),

[D3] J. Gondzio, J. A. Gruca, J. A. Julian Hall, W. Laskowski, M. Żukowski, *Solving large-scale optimization problems related to Bell's Theorem*, J. Comp. App. Math. **263**, 392 (2014),

[D4] A. de Rosier, J. Gruca, F. Parisio, T. Vértesi, W. Laskowski, *Multipartite nonlocality and random measurements*, Phys. Rev. A **96**, 012101 (2017),

które zostały opublikowane w latach 2010-2017 w recenzowanych czasopismach naukowych o zasięgu międzynarodowym. Trzy prace ukazały się w bardzo dobrym czasopiśmie fizycznym *Physical Review A*, a jedna w również dobrym czasopiśmie publikującym prace z matematyki stosowanej i obliczeniowej *Journal of Computational and Applied Mathematics*.

Cykl ten został opatrzony dość obszernym autoreferatem napisanym w dwóch językach: polskim i angielskim. Składa się on z 5 rozdziałów, z czego rozdział 1 zawiera wprowadzenie do tematyki oraz ogólne sformułowanie problemu badawczego, a także w dużym skrócie opisuje zawartość pozostałych rozdziałów autoreferatu. Następny rozdział przybliża podstawowe pojęcia używane w dalszych rozważaniach takie jak nierówność Bella na przykładzie nierówności Bella wprowadzonej przez Clausera Horne'a Shimony'ego Holta, modele ukrytych zmiennych, wielościan Bella-Pitovsky'ego, widzialność krytyczna oraz minimalna widzialność krytyczna. Rozdział 3 poświęcony jest opisowi algorytmu numerycznego użytego do wyznaczania minimalnej widzialności krytycznej, na który składają się dwie metody optymalizacyjne: programowanie liniowe (PL) oraz metoda optymalizacji nieliniowej Nelderera-Meada. Tutaj Autor wprowadził pojęcie programowania liniowego, przybliżył sposób rozwiązywania problemów programowania liniowego przy pomocy metody sympleksowej, a także opisał zasadę działania metody Nelderera-Meada. Część ta zawiera także opis złożoności obliczeniowych obu metod oraz dyskusje na temat ich precyzji, z której

RA

wynika, że obie metody mają swoje ograniczenia. Złożoność czasowa LP rośnie wykładniczo z liczbą podukładów, co sprawia, że przy użyciu standardowych komputerów typu desktop, układy kwantowe, które można w ten sposób badać to co najwyżej 12 kubitów, i to w przypadku stosowania innych metod rozwiązywania problemów programowania liniowego niż metoda sympleksowa. Natomiast w przypadku optymalizacji nieliniowej pojawia się problem lokalnych minimów. Ta część autoreferatu jest najdłuższa i najbardziej szczegółowa, co zapewne wynika z faktu, że mgr Gruca jest informatykiem z wykształcenia i muszę przyznać, że czytałem ją z zaciekawieniem. Rozdział 4 to w zasadzie streszczenie wyników opisanych w każdej z czterech prac wraz z opisem wkładu jaki Autor miał w powstanie każdej z nich. Rozdział 5 zawiera podsumowanie.

Autoreferat czyta się całkiem dobrze i pozwala on zorientować się w tematyce i otrzymanych wynikach. Nie jest on jednak wolny od wad. Kilka z nich warto przytoczyć tutaj:

1. W mojej ocenie główna teza rozprawy, którą Autor sformułował jako: *„applying optimization tools provided by modern computer science helps to assess quantum entangled states and to draw a boundary between the classical and the quantum”* jest zbyt ogólna i z gruntu prawdziwa bo trudno oczekiwać, że metody optymalizacyjne nie będą przydatne w badaniu splątanych stanów kwantowych. Autor powinien był postawić kilka bardziej szczegółowych tez.
2. W rozdziale 3 zabrakło dokładnego omówienia scenariusza Bella, który jest podstawą badań opisanych w rozprawie. Co prawda jest on zdefiniowany w publikacjach mgr. Grucy, ale skoro pojawiają się tutaj inne pojęcia, które dotyczą tego scenariusza takie jak nierówność Bella, to jego opis też powinien się tutaj znaleźć. Brak tego opisu sprawia, że np. nie jest jasne o jakich obserwablach jest mowa w definicji 1.
3. Ponadto, skoro w tymże rozdziale Autor omawia pojęcie minimalnej widzialności krytycznej, która jest używana jako miara nielokalności w pracach [D1] i [D2], to powinien był też omówić tutaj pojęcie prawdopodobieństwa łamania lokalnego realizmu, które jest z kolei używane jako miara nielokalności w pracy [D4]. Ponadto, można było minimalną widzialność krytyczną zdefiniować za pomocą formuły matematycznej. Dzięki temu autoreferat stałby się kompletny.
4. Wersja polska autoreferatu zawiera wiele kalek językowych z języka angielskiego bądź niezbyt fortunnych sformułowań takich jak np. *„Obserwacje i wnioski są wyliczone enumeratywnie w treści dokumentu.”* (strona 61), *„Każde jej zastosowanie wymaga cząstek w stanie splątanym [10], udostępniającym opis przetwarzania układu fizycznego.”* (strona 37) czy *„Proces przygotowania stanu tak, by spełnić własności splątania, nazywa się inżynierią stanu lub inżynierią splątania [11].”* (strona 37).
5. W wersji polskiej pojawia się problem z odnośnikami do wzorów: czasami odsyłają one do wzorów w wersji angielskiej.
6. Na stronie 11 (wersja angielska) słowo „facet” powinno być zastąpione słowem „face” bo może się zdarzyć, że linia może przeciąć wielościan w punkcie ekstremalnym.

Badania przedstawione w rozprawie dotyczą standardowego scenariusza Bella, w którym dwie lub więcej osób współdzieli pewien wielocząstkowy stan kwantowy i każdy z obserwatorów wykonuje pomiary na swoim podukładzie tego stanu. W ogólności każdy z obserwatorów może mieć do wyboru inną liczbę obserwabli i każda obserwabla może mieć dowolną liczbę wyników, choć w pracach [D1—D4] rozważa się scenariusze, w których ilość wyników równa się wymiarowi lokalnej przestrzeni Hilberta. Bell zauważył w swojej słynnej pracy, że takie lokalne pomiary w przypadku, gdy są wykonywane na stanach splątanych mogą prowadzić do korelacji, których nie da się wytłumaczyć przy pomocy modeli ukrytych zmiennych. Mówimy wtedy, że korelacje te łamią lokalny realizm albo w skrócie, że są nielokalne. Nielokalność, czyli istnienie korelacji nielokalnych w układach kwantowych jest jedną z najbardziej charakterystycznych cech teorii kwantów, a co więcej w ostatnich latach nabrała ona dużego znaczenia z aplikacyjnego punktu widzenia. Nielokalne korelacje leżą bowiem u podstaw dziedziny przetwarzania informacji w wersji



niezależnej od urządzeń (ang. *device-independent*), w której nie trzeba czynić założeń na temat kwantowych urządzeń używanych do wykonania danego zadania, a przez to są w zamierzeniu mniej narażone na niedoskonałości eksperymentalne. Z tego względu charakteryzacja i detekcja tej formy nieklasyczności w układach kwantowych wielu ciał to w ostatnich latach jeden z najdynamiczniej rozwijających się nurtów fizyki kwantowej.

Badania zaprezentowane w rozprawie bardzo dobrze wpisują się w ten nurt. Ich głównym celem jest wyznaczenie dwóch wielkości, które pozwalają ilościowo ocenić nieklasyczność stanów kwantowych przy użyciu zaawansowanych metod numerycznych. Pierwszą wielkością jest minimalna widzialność krytyczna tzn. maksymalna ilość białego szumu jaki trzeba dodać, aby w ustalonym scenariuszu Bella korelacje otrzymywane z danego stanu kwantowego dało się opisać przy pomocy modeli ukrytych zmiennych dla dowolnego wyboru pomiarów. Wielkość ta jest ważna z eksperymentalnego punktu widzenia bowiem określa jak bardzo dany stan kwantowy jest odporny na szum. Drugą wielkością jest prawdopodobieństwo złamania lokalnego realizmu w ustalonym scenariuszu Bella przez dany stan kwantowy przez pomiar losowych obserwacji na tym stanie. Wielkość ta charakteryzuje zdolność danego stanu kwantowego do wytwarzania nielokalności przy pomocy różnych ustawień pomiarowych obserwacji i w tym sensie, poza samym ilościowym aspektem, ma również pewne znaczenie z eksperymentalnego punktu widzenia. Konieczność zastosowania metod numerycznych do wyznaczenia tych wielkości wynika z tego, że ściany odpowiednich wielościannów Bella, czyli tak zwane optymalne nierówności Bella, które w pełni charakteryzują wszystkie korelacje opisywalne modelami ukrytych zmiennych nie są w ogólności znane, poza najprostszymi scenariuszami Bella i są niezmiernie trudne do wyznaczenia. Choć warto wspomnieć, że znane są pewne klasy nierówności Bella takiej jak te skonstruowane przez Wenera, Wolfa, Weinfurtera, Żukowskiego oraz Bruknera (nierówności WWWŻB) dla dowolnej liczby obserwatorów, których Autor używa w swoich pracach.

Przejdę teraz do bardziej szczegółowego opisu prac wchodzących w skład rozprawy mgr. Grucy.

Celem pierwszej pracy [D1] było wyznaczenie minimalnej widzialności krytycznej dla wielocząstkowych splątanych stanów czystych przy użyciu algorytmu komputerowego składającego się ze wspomnianych już dwóch składników: programowania liniowego oraz metody optymalizacji nieliniowej. Parametr ten wyznaczono dla dużej grupy wielokubitowych stanów splątanych, które są powszechnie znane w kwantowej informatyce takich jak stany Greenbergera-Horne'a-Zeilingera (GHZ), czy stany Dicke. Pod tym kątem przebadano również pewne stany mieszane o splątaniu związanym takie jak np. stan o dodatnich transpozycjach częściowych stworzony przy użyciu tzw. trzykubitowej nierozszerzalnej bazy iloczynowej przez Bennetta i współpracowników, stany Düra dla  $N=4,5,6,7$  oraz tzw. stany Smolina o czterech lub sześciu kubitach. Wyznaczono także minimalne widzialności krytyczne dla pewnych stanów otrzymanych eksperymentalnie w grupie prof. H. Weinfurtera takich jak czterokubitowe stany GHZ czy W.

Na podstawie otrzymanych danych sformułowano szereg ciekawych obserwacji, z których kilka warto wspomnieć tutaj: i) w niektórych przypadkach widzialności krytyczne otrzymane przy użyciu programu są niższe niż te otrzymane przy pomocy wspomnianych wyżej nierówności Bella WWWŻB, co wynika z faktu, że nierówności te biorą pod uwagę tylko korelacje najwyższego rzędu; ii) w ogólności minimalne widzialności krytyczne maleją wraz ze wzrostem liczby kubitów bądź liczby pomiarów, choć są pewne odstępstwa od tego zachowania jak w przypadku trzykubitowego stanu GHZ; iii) w przypadku stanów o splątaniu związanym tylko dla stanów Smolina udało się zaobserwować widzialność krytyczną mniejszą od jeden, choć wiadomo, że w innych niż rozważane w pracy scenariuszach można pokazać, że sześciokubitowe stany Düra są nielocalne [A. Sen(De) *et al.*, Phys. Rev. A **66**, 062318 (2002)]; iv) różnica pomiędzy widzialnościami krytycznymi dla  $N$ -kubitowych stanów GHZ i W w rozważanych scenariuszach Bella maleje wraz ze wzrostem  $N$ ; v) sformułowano także przypuszczenie, że minimalna widzialność krytyczna dla trzykubitowego stanu W wynosi  $3/5$ .

Cel pracy [D2] jest podobny jak cel pracy [D1], choć tym razem skupiono się na dwucząstkowych splątanych stanach kwantowych o lokalnym wymiarze trzy. Przy pomocy wspomnianego już algorytmu przeprowadzono



wyczerpującą analizę minimalnej widzialności krytycznej dla tych stanów, przy czym rozważano różne klasy trzywynikowych obserwabli kwantowych uzyskanych przy pomocy pewnych klas operacji unitarnych takich jak trzyportowe rozdzielacze wiązek sparametryzowane dwiema fazami i ich złożenia, a także grupa  $U(3)$  (czyli wszystkie obserwable). Dokonano kilku ciekawych obserwacji, z których warto przytoczyć dwie: i) minimalna widzialność krytyczna jest najmniejsza dla stanów o rzędzie Schmidta dwa, a więc ich nielokalność jest najbardziej odporna na biały szum; podobne zachowanie obserwowane jest w przypadku stanów kwantowych o wymiarze lokalnym cztery lub pięć; ii) pewna klasa obserwabli sparametryzowanych tylko trzema parametrami pozwala uzyskać prawie identyczne widzialności krytyczne jakie można uzyskać przez pomiar dowolnych obserwabli trzywynikowych. Dokonano również próby złamania lokalnego realizmu przez pewne stany kwantowe o dodatniej transpozycji jak np. stany Horodeckiego z pracy [P. Horodecki, Phys. Lett. A **232**, 333 (1997)], a tym samym obalenia słynnej hipotezy Peresa. Warto tutaj zaznaczyć, że hipoteza ta została obalona dopiero dwa lata po publikacji pracy [D2] w pracy [T. Vertesi, N. Brunner, Nat. Comm. **5**, 5297 (2014)].

Mam jedną uwagę dotyczącą części 9.2 autoreferatu. Mgr. Gruca pisze w niej, że parametryzacja podana we wzorze (9.1) pozwala odtworzyć dowolny stan dwukutrytowy. W przypadku kiedy wyznaczana jest minimalna widzialność krytyczna w przypadku kiedy minimalizacja brana jest po dowolnych obserwabliach (przypadek grupy  $U(3)$ ), wtedy rzeczywiście nie ma znaczenia w jakich bazach lokalnych zapisuje się stan w postaci Schmidta bo zawsze lokalne operacje unitarne można „przerzucić” na obserwable. Jednak w przypadku kiedy rozważane są obserwable generowane przez mniejsze zbiory operacji unitarnych, wybór baz lokalnych może mieć znaczenie. Wtedy nie można mówić, że porównanie minimalnych widzialności krytycznych dla różnych klas obserwabli zostało zrobione dla wszystkich dwukutrytowych stanów czystych, a takie odnosi się wrażenie czytając część 9.2.

Praca [D3], opublikowana w czasopiśmie z matematyki stosowanej i obliczeniowej, miała dwa cele. Pierwszym było zaprezentowanie problemu obliczania minimalnej widzialności krytycznej dla badaczy spoza kwantowej teorii informacji. Problem ten został przedstawiony w najprostszym przypadku eksperymentu Bella z dwoma obserwatorami, z których każdy wykonuje dwa pomiary dwuwynikowe. Zaprezentowano także odpowiedni problem programowania liniowego, przy pomocy którego można stwierdzić czy dane korelacje można opisać w ramach modeli ukrytych zmiennych w tym scenariuszu, a który jest następnie używany do wyznaczenia minimalnej widzialności krytycznej. Omówiono także działanie algorytmu wyznaczającego minimalną widzialność krytyczną.

Drugim celem pracy było próba zoptymalizowania działania algorytmu wyznaczającego minimalną widzialność krytyczną tak aby można go było stosować do układów kwantowych o większej liczbie podukładów lub/oraz do scenariuszy z większą liczbą pomiarów. Zastosowano tutaj dwa środki: i) w pierw wykorzystano fakt, że duża część warunków liniowych w odpowiednim problemie LP jest liniowo zależnych (jak pisze Autor nawet 90%) i można je pominąć, zmniejszając przez to rozmiary odpowiedniej macierzy definiującej program liniowy; ii) zastąpiono metodę sympleksową używaną do rozwiązywania problemów programowania liniowego przez metody punktu wewnętrznego. Obie metody zostały porównane pod kątem czasu potrzebnego do rozwiązania odpowiedniego problemu LP dla  $N$ -kubitowego stanu GHZ w najprostszym scenariuszu Bella dla różnych wartości  $N$  (Tabele 5 i 6 z pracy [D3]). Otrzymane wyniki pokazują, że metoda sympleksowa jest bardziej efektywna dla mniejszych  $N$ , podczas gdy metody punktu wewnętrznego są bardziej efektywne dla problemów o większym rozmiarze, co jednak odbywa się kosztem dokładności. Jak pokazano w pracy, zastosowanie metod punktu wewnętrznego pozwala badać układy kwantowe o większej liczbie cząstek lub rozważać scenariusze Bella z większą liczbą obserwabli bądź wyników.

Celem ostatniej pracy [D4] było wyznaczenie innej wielkości pozwalającej mierzyć nieklasyczość stanów kwantowych jaką jest prawdopodobieństwo tego, że w ustalonym scenariuszu Bella (ustalona liczba obserwabli i wyników) pomiar losowo wybranych obserwabli na danym stanie kwantowym prowadzi do nielokalnych korelacji. Wyznaczenie tej wielkości analitycznie jest w ogólności bardzo trudnym zadaniem, toteż w pracy [D4] wyznaczano częstotliwości łamania na podstawie odpowiednio dużej próby losowej.



Podobnie jak poprzednio w celu sprawdzenia czy dane korelacje są nielokalne używano programowania liniowego. Częstotliwości łamania wyznaczono dla dużej liczby czystych stanów kwantowych wykorzystywanych w kwantowej teorii informacji, skupiając się głównie na stanach wielokubitowych takich jak np. stany GHZ o różnej liczbie cząstek, stany Dicke, czy stany grafowe. Przebadano także stany mieszane o splątaniu związanym takiej jak czterokubitowy stan Smolina, a także pewne stany o lokalnym wymiarze trzy. Na podstawie otrzymanych wyników Autorzy sformułowali kilka obserwacji.

i) Prawdopodobieństwo łamania lokalnego realizmu rośnie wraz ze wzrostem liczby podukładów, co samo w sobie jest dość oczekiwaną tendencją. Ciekawe jest tutaj tempo tego wzrostu; Autorzy pokazują, że w przypadku  $N=5$  w przypadku wszystkich rozważonych stanów, a nawet dla kilku losowo wybranych stanów częstotliwości są bliskie jedności i to najprostszym scenariuszu z dwiema dychotomicznymi obserwablami na stronę. Podobny efekt, choć również raczej oczekiwany, można zaobserwować, gdy zwiększa się liczbę obserwabli; dla wszystkich przebadanych stanów czystych częstotliwości zbliżają się do wartości 1.

ii) Na podstawie wyznaczonej częstotliwości łamania można stwierdzić czy dany stan jest prawdziwie wielocząstkowo splątany (ang. *genuinely multipartite entangled*). Należy jednak zauważyć, że w przypadku wielocząstkowych stanów czystych stosunkowo łatwo można sprawdzić czy dany stan jest wielocząstkowo splątany. Myślę, że o wiele ciekawsza byłaby podobna analiza dla stanów mieszanych.

iii) Częstotliwość łamania lokalnego realizmu przez czterokubitowy stan grafowy jest większa w scenariuszu, w którym wszyscy obserwatorzy wykonują dwa dwuwynikowe pomiary niż częstotliwość dla odpowiedniego stanu GHZ. Autorzy próbują wytłumaczyć ten fakt tym, że uogólniony rząd Schmidta dla stanu grafowego jest większy niż dla stanu GHZ.

Mam dwa komentarze dotyczące sposobu w jaki sformułowany jest program liniowy pozwalający rozstrzygnąć czy dane korelacje mogą być opisane w ramach modeli ukrytych zmiennych. W pracach [D1—D4] używa się twierdzenia Fine'a [A. Fine, Phys. Rev. Lett. **48**, 291 (1982)], które mówi, że zbiór rozkładów prawdopodobieństw  $\{p(a,b|A_i,B_j)\}$  da się opisać w ramach tych modeli wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje łączny rozkład prawdopodobieństwa  $p(A_1,A_2,B_1,B_2)$ , który odtwarza wszystkie rozkłady  $p(a,b|A_i,B_j)$  w sensie wzorów (8.1). Zadaniem programu liniowego w tym sformułowaniu jest zatem znalezienie rozkładu  $p(A_1,A_2,B_1,B_2)$ , który spełnia warunki (8.1).

1. Czy nie można by sformułować tego zadania używając bezpośrednio formuły (7.2)? Wiadomo, że dla dowolnego scenariusza Bella całą w (7.2) można zamienić na skończoną sumę po wierzchołkach wielościanu LHV, które są lokalnych i deterministycznych rozkładach prawdopodobieństwa  $p(a|A_i)p(b|B_j)$ , gdzie  $p(a|A_i)$  i  $p(b|B_j)$  są deterministyczne dla dowolnego wyboru obserwabli. Wierzchołki te łatwo wypisać, choć nawet w najprostszym scenariuszu, w którym każdy obserwator mierzy dwie dwuwynikowe obserwable ich liczba rośnie wykładniczo wraz z ilością cząstek. Wtedy zadaniem programu liniowego byłoby znalezienie takiego rozkładu prawdopodobieństwa  $p(\lambda)$ , że warunki (7.2) są spełnione.

2. Drugi komentarz dotyczy wykorzystania tzw. warunków niesygnalizowania, które sprawiają, że można obniżyć wymiar przestrzeni liniowej, w której zdefiniowany jest wielościan Bella. Przykładowo, w scenariuszu, w którym mamy dwóch obserwatorów i każdy wykonuje dwa dwuwynikowe pomiary wszystkie korelacje kwantowe można opisać przy pomocy 8 prawdopodobieństw, np.  $p(0,0|A_i,B_j)$ ,  $p(0|A_i)$  oraz  $p(0|B_j)$ , a więc akurat w tym przypadku wymiar wektora prawdopodobieństw zmniejsza się o połowę. Wydaje się więc, że użycie warunków niesygnalizowania powinno zmniejszyć rozmiar programu liniowego. Zastanawiam się czy Kandydat myślał o tym implementując swoją metodę.

Zanim przejdę do konkluzji, odniosę się jeszcze do wkładu autora w powstanie wszystkich prac. Otóż, jak wynika z autoreferatu oraz z załączonych oświadczeń, wkład mgr. Grucy w przypadku „fizycznych” prac [D1,D2,D4] jest duży, choć nie dominujący, ale jednak kluczowy i obejmuje stworzenie programu STEAM-ROLLER2 oraz jego odpowiednich rozszerzeń o niezbędne funkcjonalności, uzyskanie części wyników,

RA

a także napisanie odpowiednich rozdziałów tych prac. Wkład Autora w pracę [D3] to: i) integracja kodu programu STEAM-ROLLER2 z kodem optymalizatora punktu wewnętrznego oraz jego optymalizacja; ii) wykonanie testów porównawczych; iii) napisanie większości manuskryptu. Tutaj wkład Kandydata był dominujący. Wkład mgr. Grucy w powstanie wszystkich artykułów jest więc dobrze określony i w mojej ocenie kluczowy dla powstania tych prac, w tym także rezultatów naukowych w nich zawartych. Jest on w zupełności wystarczający do uzyskania stopnia naukowego doktora w niniejszym przewodzie interdyscyplinarnym.

### **Konkluzja**

Cel jakim było zastosowanie zaawansowanych metod numerycznych do badania korelacji w układach kwantowych wielu ciał został osiągnięty i należy tutaj podkreślić, że problem postawiony przez Kandydata został umiejętnie dobrany tak aby wykorzystać jego umiejętności, a sam Kandydat bardzo dobrze wywiązał się z postawionego zadania. Użycie algorytmu numerycznego napisanego przez mgr. Grucę pozwoliło sformułować szereg oryginalnych i ważnych obserwacji dotyczących nieklasycznych korelacji w układach kwantowych i badania zawarte w rozprawie mają niewątpliwy wkład w rozwój informatyki kwantowej. W mojej ocenie rozprawa spełnia wszelkie wymagania stawiane przed rozprawami w przewodach interdyscyplinarnych i wnoszę o dopuszczenie mgr. J. Grucy do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Remigiusz Auguszek